

Programmation et géométrie dynamique : une imbrication surprenante

Yves Martin

LIM – Université de La Réunion, yves.martin@univ-reunion.fr

Résumé

S'il existe de nombreuses possibilités de programmation, avec sortie graphique, disponibles pour les lycéens, la programmation à l'intérieur des logiciels de géométrie dynamique offre de telles perspectives que non seulement elles bousculent les capacités opérationnelles des logiciels, mais elles nous interrogent aussi sur l'évolution du concept même de géométrie dynamique. Nous présentons dans cet article quelques premiers éléments d'un travail de recherche en didactique des mathématiques sur ce thème, en précisant les pistes retenues, le terrain d'expérimentation et les premières réalisations. Nous verrons ainsi comment cette technologie élargit le concept de micromonde à l'origine de la géométrie dynamique. Puis, nous aborderons la relation d'instrumentalisation de l'environnement de géométrie dynamique par la programmation, avant de terminer par une relation duale intégrée au sein même des deux logiciels libres étudiés qui ont adopté cette technologie. Nous parlerons enfin des premiers exemples de projets réalisés par des étudiants de M2 du master enseignement de mathématiques. Le projet initial de géométrie dynamique semble se transformer en une plateforme de programmation avec sortie dynamique dont la richesse est encore à explorer.

Mots clés

Programmation, Géométrie dynamique, JavaScript, CaRScript, Formation initiale

1. Introduction – Problématique

Sous l'influence de l'équipe de Cabri-géomètre (Laborde, 1997), la géométrie dynamique a su porter le concept de micromonde à un niveau d'exigence qui lui est propre, améliorant régulièrement les mises en œuvre des outils d'évolution de son propre environnement. Les logiciels libres actuels se sont inscrits dans cette tradition.

L'utilisateur peut construire des environnements géométriques spécifiques et explorer ainsi des géométries peu pratiquées. Voici par exemple un résultat récent de géométrie non arguésienne : l'existence de triangles ayant deux orthocentres (ci-contre). Sans la mise en œuvre d'un micromonde du plan de Moulton (Martin, 2008), ce résultat, loin des représentations usuelles, ne pouvait pas être mis en évidence, alors qu'une fois rencontré expérimentalement, il devient assez élémentaire, dans des contraintes d'existence que l'on ne développera pas ici (Martin, sous presse), de systématiser de telles constructions.

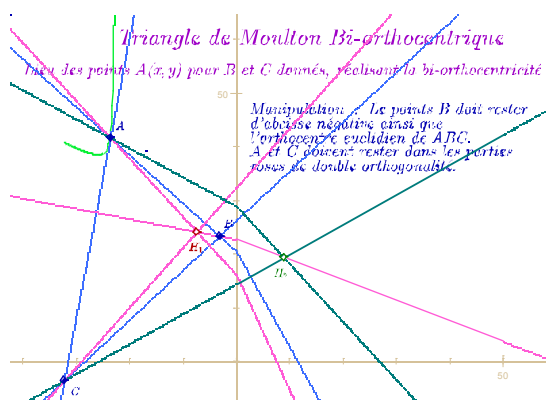


Figure 1. Triangle de Moulton biorthocentrique.

Avec l'intégration d'un langage extérieur largement pratiqué sur la toile – le JavaScript – et donc pérenne (CaRMetal en 2009, GeoGebra en 2011), les potentialités des micromondes désormais disponibles ouvrent la géométrie dynamique à des horizons bien au-delà de son projet initial. C'est sur cette évolution que porte notre projet de recherche dont nous relatons ici les deux premières phases : celle de l'exploration préalable de ces nouveaux horizons, puis celle de l'ingénierie didactique à l'attention des étudiants de master d'enseignement, en cours d'élaboration. Une troisième phase sera centrée sur l'appropriation effective des étudiants de cet outil, en particulier pour les oraux de concours, et une éventuelle quatrième phase pourrait être consacrée à la mise en œuvre dans les classes, en particulier au sein de la nouvelle spécialité ISN des lycées français. Même si la recherche entreprise porte sur l'utilisation des deux logiciels déjà cités, l'antériorité de l'intégration du JavaScript dans CaRMetal fait que cette présentation sera plutôt illustrée avec ce logiciel.

<pre> 1 n = Input("Nombre d'itérations ?"); 2 Expression("n", n, 0, 0); 3 h = "(x(B)-x(A))/n"; //pas 4 m = "A"; //condition initiale 5 6 for(i=1; i<=n; i++){ 7 a = Point("x_m+_h", "y_m*(1+_h)"); 8 m=a; 9 SetPointType(m, "cross"); 10 } 11 </pre>	<pre> n = prompt("Nombre d'itérations ?"); ggbApplet.evalCommand("n="+n); h = "(x(B)-x(A))/n"; m = "A"; for(i=1; i<=n; i++){ ...ggbApplet.evalCommand("A"+i+"=(x("+m+")+"+_h+",y("+m+")*(1+_h))"); ... m = "A"+i; ...ggbApplet.setLabelVisible(m,false); ...ggbApplet.setPointStyle(m, 3); } </pre>
---	---

Figure 2. Le même script sur la méthode d'Euler ($y'=y$) à gauche avec CaRMetal, à droite avec GeoGebra.

2. Extension géométrique du micromonde

Si les *séquences* de Géogebra permettent une extension significative du micromonde initial, même associées au tableur interne, elles restent de la programmation de boucles imbriquées, en ligne de commande. Un langage de programmation apporte à la fois plus de finesse et d'ampleur. La mise en œuvre d'une instruction JavaScript *InterActiveInput* permet par exemple à CaRMetal de transformer le concept, largement standard, d'objets initiaux d'une macro, en une expérience de l'interface utilisateur tout à fait nouvelle en géométrie dynamique. Pour illustrer cela, l'un des auteurs du logiciel, Pierre Marc Mazat (2011) a réalisé un script de patrons dynamiques d'icosaèdre tronqué (ballon de football) dans lequel l'utilisateur peut cliquer à chaque instant l'arête d'une nouvelle face à partir de laquelle il veut continuer le patron, ceci soit sur le polyèdre, soit sur le patron en construction. En temps réel, le script calcule alors quelles sont les arêtes que l'utilisateur peut continuer à cliquer pour poursuivre son patron.

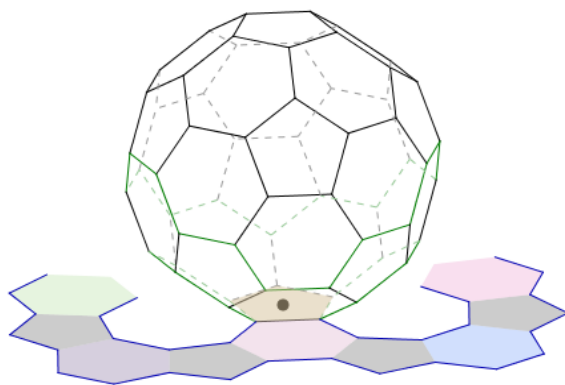
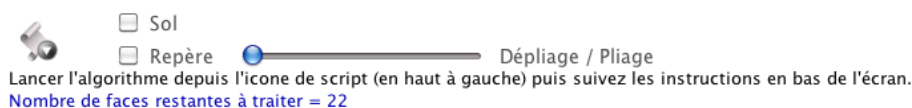


Figure 3. Réalisation d'un patron en cliquant sur les arêtes disponibles (bleues sur le patron, vertes sur le polyèdre). Pendant la construction, l'utilisateur peut déplacer le polyèdre, le faire tourner et plier le patron sur le polyèdre.

Cette richesse nouvelle ne s'applique pas qu'en géométrie bien entendu. Elle permet des constructions dynamiques inattendues en statistiques (Martin, 2010), en analyse, ou encore en géométrie hyperbolique – programmations de pavages dynamiques complexes – car tous les outils hyperboliques de CaRMetal ont été scriptés.

3. Nouvelles représentations de la programmation

Les étudiants de master enseignement, formés aux CarRScripts – scripts de CaRMetal – dans la continuité de leur découverte de la géométrie dynamique, ne s'inscrivent dans l'histoire de la géométrie dynamique et ne perçoivent pas l'évolution du paradigme dans la démarche précédente : il s'agit juste d'une fonctionnalité du logiciel qui participe à la construction de leurs représentations de la géométrie dynamique et sera incluse, à terme, dans leurs schèmes d'action. Par contre, ayant déjà pratiqué la programmation, ils ont des représentations sur ce que produit la programmation et peuvent être assez déroutés de la rencontre entre programmation et géométrie dynamique. Didactiquement, c'est en effet un changement de cadre significatif aussi pour la programmation. L'illustration suivante montre la construction de la courbe de Césaro, dépendant d'un paramètre qui est modifié à la souris par l'utilisateur pendant l'exécution du script.

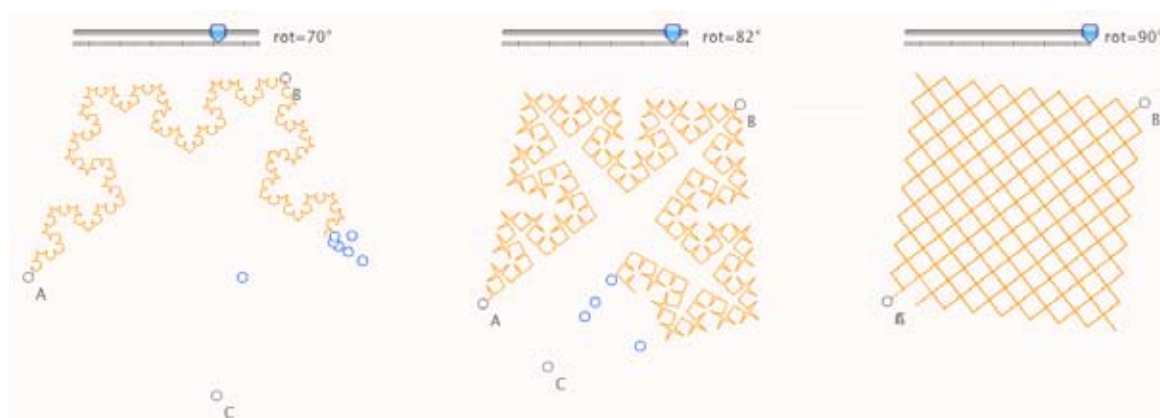


Figure 4. Définition récursive d'une courbe et manipulation directe, pendant la construction, sur un paramètre qui la définit.

L'expérience de formation montre que ce type de figure interroge les représentations de chacun sur la récursivité car la sortie graphique dynamique extériorise une richesse conceptuelle connue, mais qui pouvait n'avoir pas été perçue aussi clairement. L'imbrication fine des outils internes aux logiciels, avec un langage externe est une situation semble-t-il jamais rencontrée en programmation auparavant car le support de sortie non seulement n'est pas inerte, mais il n'est pas non plus seulement que dynamique (comme ci-dessus). Il est aussi riche d'une capacité d'interprétation de commandes internes bien plus complexes que son projet initial le laissait supposer.

Ainsi, une des façons efficaces, même si ce n'est pas la seule, d'utiliser la programmation en interaction avec la géométrie dynamique est d'instrumentaliser les possibilités internes de programmation du logiciel. Par exemple, dans le simple champ du calcul algébrique, on peut construire des points qui sont des combinaisons linéaires booléennes de plus de 1000 situations différentes. Ces points ont alors des coordonnées dont l'écriture algébrique, produite par script, comporte 12 000 à 15 000 caractères. L'instrumentalisation des capacités internes de ces logiciels de géométrie dynamique ajoute, chez les utilisateurs, une représentation nouvelle du champ d'investigation de la programmation. Le cas algébrique n'est qu'un exemple qui peut

s'étendre à la plupart des fonctionnalités du logiciel. Cette approche est encore à explorer tant la diversité des potentialités est grande.

4. Nouvelles représentations algorithmiques

Si l'extension du concept de micromonde peut aussi être perçue comme une instrumentalisation de la programmation externe par la géométrie dynamique à ses propres fins, et si la programmation, dans son champ d'investigation, sait instrumentaliser certaines caractéristiques de programmation des logiciels eux-mêmes, une troisième approche va laisser ces deux domaines dans leurs champs propres, le logiciel permettant alors une interaction conjointe d'un autre type. Les scripts action sont en effet des programmes JavaScript qui peuvent être réactivés quand un objet est déplacé. Les mises en œuvre dans les deux logiciels sont assez différentes, plutôt du côté de la géométrie sous GeoGebra, un script étant un élément d'un objet, plutôt du côté du langage dans CaRMetal, un script étant écrit, il peut être appliqué à plusieurs objets. Techniquement, cette fonctionnalité est d'abord un comportement interne des deux logiciels vis-à-vis des scripts. Elle interroge le rapport que l'utilisateur peut avoir avec l'algorithmique, car, dans de nombreux cas, il suffit d'utiliser un algorithme statique dans un script pour transformer ce script en programme dynamique.

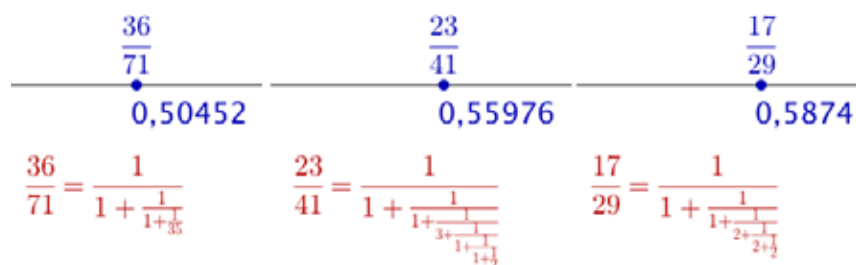


Figure 5. Script action appliqué à un curseur qui affiche la décomposition en fraction continue d'un rationnel.

Alain Busser (2011), un autre auteur de CaRMetal, a proposé plusieurs exemples de cette situation dont celle illustrée ci-dessus : la décomposition d'un nombre fractionnaire en fraction continue. Le script ne fait que construire en LaTeX la fraction continue de l'abscisse rationnelle du point d'un curseur et il est rendu dynamique par sa nouvelle application dès que le curseur se déplace. Les scripts action permettent d'enrichir à nouveau le micromonde de la géométrie dynamique, cette fois-ci dans le registre de la manipulation directe. Eric Hakenhoz, le concepteur de CaRMetal et des CaRScripts, illustre ce propos avec une activité élémentaire de lycée, en géométrie repérée, en construisant un carré ABCD de centre O dans lequel ces 5 points sont manipulables individuellement par l'utilisateur tout en conservant la propriété d'être un carré de centre O. Pour cela à partir de chaque sommet du carré, un script construit les trois autres en utilisant le centre. Le script du centre simule la manipulation en translation de l'ensemble.

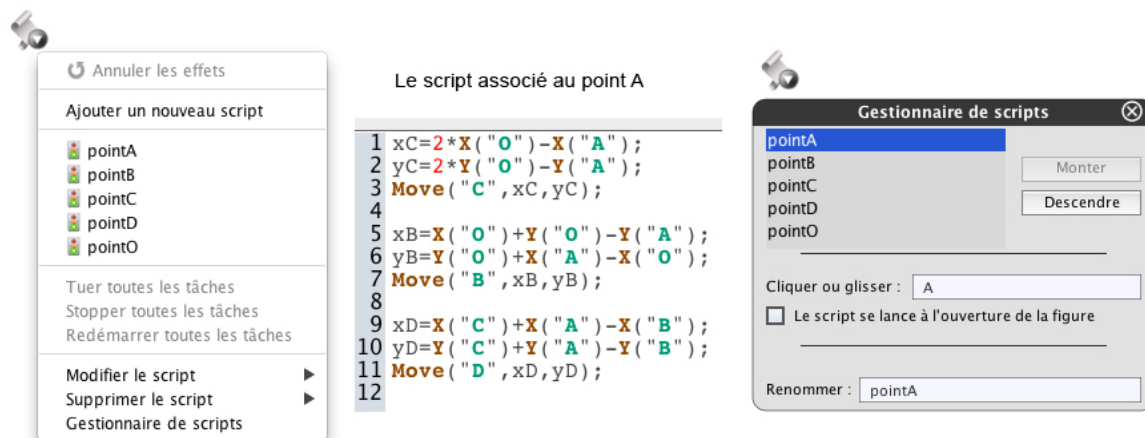


Figure 6. Scripts action pour une manipulation directe enrichie. Détails de la démarche sur une situation archétypique élémentaire.

5. Quelques pistes d'ingénierie didactique

Même s'il est encore trop tôt pour aborder en profondeur cette partie, la première phase de notre recherche et les premiers éléments de formation mettent en évidence quelques points sur lesquels on peut déjà s'appuyer :

- Une pratique un minimum technique du logiciel retenu et pas uniquement géométrique est nécessaire avant d'aborder les scripts. En particulier, il est utile de structurer une genèse instrumentale approfondie des outils algébriques.
- Après une phase de découverte où l'on construit des figures par script à partir d'une « page blanche », aborder des scripts qui prennent leurs informations dans une figure déjà commencée et les utilisent *dynamiquement* est non seulement significatif quant aux possibilités des scripts, mais didactiquement pertinent comme utilisation des interactions internes aux jeux de cadres entre l'algorithmique et la géométrie ou l'analyse.
- Pratiquer des scripts action, même élémentaires comme ci-dessus, permet de confronter les représentations des futurs enseignants sur l'aspect statique ou dynamique d'un algorithme, et la réalité fonctionnelle ou non du code écrit.

Après une formation initiale, l'appropriation effective de ces outils passe par un travail personnel significatif. Dans le cadre d'une des deux épreuves de l'évaluation de l'UE « TICE » de notre M2 maths enseignement, les étudiants ont à préparer un projet qui demande environ une quinzaine d'heures de travail. Chaque année, parmi les projets proposés, un utilise les CaRScripts. En 2011, le projet consistait à construire un snub cube et illustrer ses trois types de rotation. Ce premier projet était assez guidé, en particulier sur les choix de ce qui pouvait se faire efficacement du côté géométrique, et ce qu'il était plus pertinent d'être fait par script.

La fiche de projet donnait les éléments mathématiques nécessaires, sous forme de liens Internet. Il était par exemple conseillé une fois le snub cube initial réalisé avec ses parties cachées, de le transformer en macro pour ne pas avoir à construire son image à la main. En définitive, seuls les placements dans le repère 3D du logiciel des 24 sommets du snub cube initial et des 24 sommets de son image en rotation ont été réalisés par scripts.

En 2012, deux étudiantes particulièrement brillantes ont accepté un projet plus long que le temps imparti pour cette épreuve, et ont bien voulu reprendre le patron interactif de Pierre Marc Mazat (voir Figure 3) pour l'adapter au snub cube.

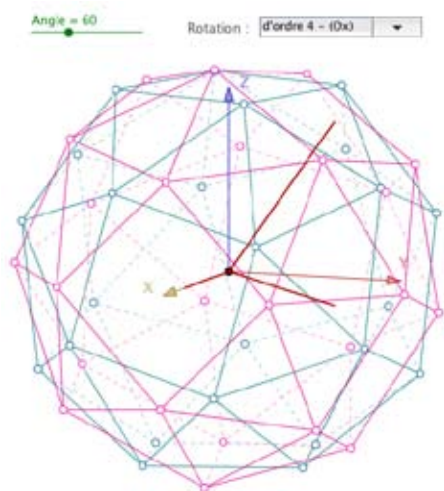


Figure 7. Mélange des outils géométriques et des scripts pour illustrer les trois types de rotation du snub cube (réalisation étudiante M2 – nov. 2011).

Le contexte du projet était totalement différent, il n'y a eu aucune directive particulière. De plus, en liaison avec l'UE d'ingénierie didactique de leur master, ces étudiantes présenteront aussi en fin d'année, dans cette UE, un exposé de « type narration de recherche » pour décrire les aspects non techniques de leur travail (appropriation, pistes de recherche, répartition des tâches, interactions, etc.).

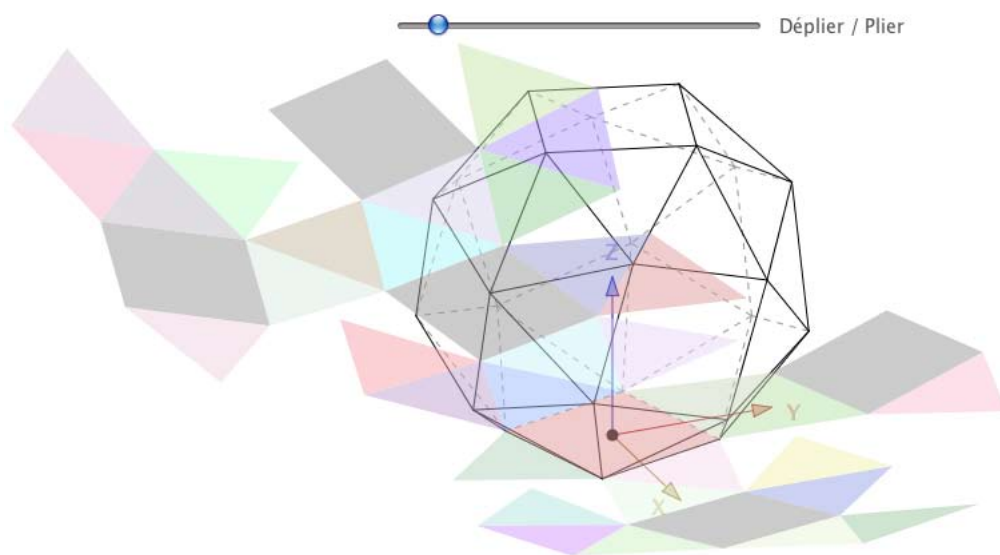


Figure 8. Patron interactif du snub cube réalisé par deux étudiantes de M2 (oct. 2012).

Dans le cadre des échanges internes au sein de notre laboratoire, un étudiant de M1 informatique a soutenu en juin 2012 un TER (travail d'étude et de recherche) utilisant les CaRScripts. Un TER est un travail plus conséquent d'environ 60 h. Il s'agissait de réaliser un parcours fermé du cavalier d'échec sur un cube formé de 6 échiquiers, chaque face disposant d'un cavalier pouvant être manipulé par l'utilisateur. Si le travail est bien entendu suivi par l'encadrant, l'étudiant a toute liberté d'action pour atteindre le but du projet. La piste choisie par l'étudiant était plus informatique que mathématique, avec des préoccupations fortes d'ergonomie à la place de la dimension didactique. Le « R » du « TER » a rempli sa fonction : pour que le projet aboutisse, il a fallu enrichir le logiciel d'une nouvelle fonctionnalité. Ainsi, depuis la version 3.7.5, on peut lancer un script « on mouse up », i.e. au lâcher de la souris sur un objet, ce qui s'est vite avéré indispensable pour ce projet.

6. Conclusion

La géométrie dynamique est devenue un nouveau paradigme pour l'enseignement de la géométrie – et de l'analyse au lycée – au point d'être présente non seulement dans les programmes scolaires, mais aussi aux épreuves orales des concours de recrutement des enseignants de mathématiques en France. Désormais, avec l'intégration d'un langage de programmation extérieur, elle fait elle aussi sa révolution 2.0 en élargissant son champ d'application bien au-delà de la géométrie et en permettant, entre autres, des échanges inédits et féconds entre la programmation et le support de sortie graphique quand celui-ci est originellement dynamique et capable d'interprétation d'expressions algébriques. Nous avons présenté les premières conséquences conceptuelles de cette rencontre en les illustrant de réalisations pratiques. Déjà, ces premières années de formation des étudiants mettent en relief à quel point la finesse didactique et cognitive des mises en œuvre internes aux logiciels est un facteur d'appropriation déterminant, plus essentiel que les possibilités techniques.

La question de la formation des enseignants en est encore au stade expérimental et en milieu protégé. Michèle Artigue (2011) a souvent souligné la distance entre ce type de formation et le passage à une échelle plus vaste. Sur cette question, la réflexion se porte vers des pratiques de parcours d'autoformation de type Pairform@nce. Cette évolution de la géométrie dynamique s'accompagne de nouvelles possibilités de programmation qui pourraient être prises en compte dans la formation initiale des étudiants scientifiques. Un projet d'intégration de JPython à Geogebra est en cours de réalisation, ce qui pourrait permettre d'enseigner Python directement dans un environnement dynamique.

Enfin, la nouvelle orientation des masters d'enseignement en France (avec l'écrit du CAPES en fin de M1 à partir de juin 2013) va réorganiser les maquettes de formation et devrait permettre de proposer des TER sur ce thème de recherche, en mathématique, en début du M2, ce qui enrichira aussi bien la réflexion que la pratique, et devrait permettre de proposer plus rapidement des ingénieries didactiques propres à une diffusion.

Références

- Artigue, M. (2011). L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation. Dans *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Repéré à http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2891/1189
- Busser, A. (2011). *Le script est là? Action! MathémaTICE*, 25. Repéré à <http://revue.sesamath.net/spip.php?article339>
- Laborde, J.-M. (1997). *Projet Cabri-géomètre : conception et réalisation de micromondes de manipulation directe d'objets abstraits*. Grenoble, France : EIAH, Université Joseph Fourier.
- Martin, Y. (sous presse). *Orthocentric and bi-orthocentric triangles in Moulton's plan*.
- Martin, Y. (2008). Un exemple de plan non arguésien en géométrie dynamique. Dans *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics* (p. 233-248). Héraklion, Crète : Département de l'éducation de l'Université de Crète.
- Martin, Y. (2010). *Statistiques dynamiques : un exemple d'intrication entre la programmation et la géométrie dynamique*. La Réunion : Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques de l'Université de La Réunion. Repéré à <http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?article326>
- Mazat, P.-M. (2011). La panoplie du petit footballeur : les patrons dynamiques de l'icosaèdre tronqué. *MathémaTICE*, 26. Repéré à <http://revue.sesamath.net/spip.php?article356>